SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Ines Pozaić

NEKE KONSTRUKCIJE ANALITIčKIH FUNKCIJA

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof. dr. sc.
Dražen Adamović

Zagreb, srpanj 2014.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

..mojoj obitelji..

Sadržaj

Uvod

Glavni cilj ovog diplomskog rada su neke konstrukcije analitičkih funkcija. Poseban naglasak će biti dan na svojstva gama funkcije i na Weierstrassovu produktnu formulu. Općenito, svaka funkcija kojoj je područje definicije otvoren skup i koja je derivabilna, i ako je njezina derivacija neprekidna, naziva se analitička funkcija. Funkcija je analitička u točki z_0, ako postoji okolina oko te točke na kojoj je funkcija f analitička. Za analitičku funkciju postoje derivacije svakog reda i ona se može razviti u red potencija. U prvom poglavlju navodimo (bez dokaza) najvažnija svojstva analitičke funkcije.

Drugo poglavlje počinje ponavljanjem nekih stvari o nepravim integralima. Prvo navodimo definiciju nepravog integrala, zatim uniformne i lokalno uniformne konvergencije. Također, funkcija f je lokalno integrabilna, ako je $f|_{[a,b]}$ integrabilna na svakom zatvorenom segmentu $[a, b]$. Najvažniji rezultat tog dijela je Leibnizovo pravilo, lema 2.1.5. koji govori o konstrukciji analitičke funkcije pomoću nepravog integrala koji konvergira lokalno uniformno. U drugom dijelu ovog poglavlja definiramo gama funkciju. Funkciju Γ, definiranu kao

$$\Gamma(z) := \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t}\, dt,$$

na skupu svih $z \in \mathbb{C}$, za koje postoji limes $\lim_{\epsilon\to 0, R\to+\infty} \int_\epsilon^R t^{z-1} e^{-t}\, dt$ nazivamo gama funkcija. Slijedi propozicija 2.2.2. kojom pokazujemo da je gornjim nepravim integralom definirana analitička funkcija i da su joj derivacije dane sa

$$\Gamma^{(k)}(z) := \int_0^\infty t^{z-1} (ln\ t)^k e^{-t}\, dt\ (k \in \mathbb{N}_0).$$

Nadalje, promatrati ćemo problem proširenja gama funkcije s desne strane poluravnine do analitičke funkcije na većem području. Dokazujemo da se gama funkcija može proširiti do analitičke funkcije na $D = \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, ...\} = \mathbb{C} \setminus \{m \in \mathbb{Z}, m \leq 0\}$. Zbog $|\,\Gamma(z)\,| \leq \Gamma(x) \quad (x = Re\,(z))$ gama funkcija je ograničena u svakoj zatvorenoj pruzi oblika $0 < a \leq x \leq b$. Iz toga slijedi karakterizacija gama funkcije, propozicija 2.2.5. što je ujedno najvažniji rezultat ovoga dijela. Treći dio ovoga poglavlja je teorija beskonačnih produkata u kojoj se definiraju beskonačni produkti, odnosno njihova (apsolutna, normalna) konvergencija. Pokazujemo da beskonačan produkt

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{\frac{-z}{n}}$$

koji svodimo na beskonačnu sumu $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{\frac{-z}{n}}-1\right]$ normalno konvergira na cijelom $\mathbb{C}$, to su lema 2.3.10 i korolar 2.3.11. Još jedan primjer analitičke funkcije na cijelom $\mathbb{C}$, dan je korolarom 2.3.13., a to je funkcija definirana kao $G(z) = \lim_{n\to\infty} G_n(z)$, i ta funkcija ima polove prvog reda na skupu $S = \{0, -1, -2, ...\}$. Najvažniji rezultati ovog dijela su Gaussova gama funkcija, propozicija 2.3.14., te Eulerova produktna formula, propozicija 2.3.16., koja pokazuje da funkcija

$$\Gamma(z)\,\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}$$

zadovoljava kriterije karakterizacije gama funkcije.

U trećem poglavlju se bavimo problemom određivanja analitičke funkcije f kao rješenja dane distribucije nultočaka. Egzistenciju rješenja tog problema daje Weierstrassov teorem o produktima, prva varijanta, teorem 3.0.24., koji kaže da funkcija f ima nultočke u točkama diskretnog skupa S, a red nultočke je unaprijed definirana vrijednost m_s. Po konstrukciji, f ima oblik konačnog ili beskonačnog produkta, iz kojeg je lako iščitati nultočke. Važna posljedica Weierstrassovog teorema o produktima je propozicija 3.0.26. koja karakterizira meromorfne funkcije na $\mathbb{C}$ kao kvocijent dvije cijele funkcije, pri čemu je funkcija f meromorfna na otvorenom skupu $S \subseteq \mathbb{C}$, ako skup singulariteta nema gomilište u S i ako su svi singulariteti ili uklonjivi ili polovi. U drugom dijelu ovog poglavlja bavimo se primjenom Weierstrassovog teorema. Definiramo Weierstrassove elementarne faktore E_k kao

$$E_0 := (1-z),\ E_k(z) := (1-z)\,exp\left(z+\frac{z^2}{2}+\cdots+\frac{z^k}{k}\right), k \in \mathbb{N}$$

te Weierstrassov beskonačan produkt kao $\prod_{n=1}^{\infty}\left(E_{k_n}\left(\frac{z}{s_n}\right)\right)^{m_n}$. Navodimo drugu verziju Weierstrassove produktne formule, teorem 3.1.3., koji kaže da beskonačan produkt $\sum_{n=1}^{\infty} m_n \left|\frac{z}{s_n}\right|^{k_n+1}$ konvergira normalno i definira analitičku funkciju f, čije su nultočke $s_i, i = 1, 2, ..$ reda $m_i, i = 1, 2, ...$, te da funkcija $f_0(z) := z^{m_0} f(z)$ ima još jednu nultočku reda m_0. Na kraju navodimo primjere u kojima tražimo cijelu funkciju. U primjeru 1. tražimo funkciju čije su nultočke veće ili jednake 0, znači samo pozitivne točke, i tu nam Weierstrassov teorem daje kao rješenje funkciju

$$f(z) := z \cdot \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{n^2}\right).$$

U primjeru 2. tražimo funkciju koja ima nultočke u $\mathbb{Z}$. Tu nam Weierstrassov teorem kao rješenje daje funkciju $f(z) := z \cdot \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{n^2}\right) e^{\frac{z}{sn}}$. Navodimo i drugi način rješavanja istog problema, uz pomoć *sin* πz. Njega svodimo na beskonačan produkt pomoću dekompozicije za kotangens funkciju. Dobivamo rješenje $\sin \pi z = \pi z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)$.

Na kraju ovog uvoda bih se htjela zahvaliti svom mentoru, prof.dr.sc.Draženu Adamoviću, na velikom strpljenju, pomoći i podršci prilikom pisanja ovog rada.

Poglavlje 1

Osnovni pojmovi vezani za analitičke funkcije

U ovom poglavlju navodimo neke poznate rezultate iz kompleksne analize, koji su nam potrebni za pokazivanje određenih rezultata. Navodimo definiciju analitičke funkcije, teoreme o Taylorovom i Laurentovom razvoju, princip jedinstvenosti analitičke funkcije i zbog potpunosti i teoriju izoliranih singulariteta.

Definicija 1.0.1. *Za funkciju $f : D \to \mathbb{C}$, pri čemu je D otvoren podskup u $\mathbb{C}$, kažemo da je* ***analitička*** *ako je derivabilna i njena derivacija f' je neprekidna na D.*
Za funkciju f kažemo da je ***analitička u točki*** *$z_0 \in D$ ako postoji okolina od z_0 na kojoj je f analitička.*
Funkcije koje su analitičke na čitavoj kompleksnoj ravnini zovu se ***cijele funkcije****.*

Nadalje, pokazujemo da za analitičku funkciju postoje sve derivacije u točki i da se ona može razviti u Taylorov red.

Teorem 1.0.2. *(Taylorov razvoj analitičke funkcije)*
Neka je funkcija f analitička na krugu $K(z_0, r)$. Tada za svaki $z \in K(z_0, r)$ vrijedi

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \, (z - z_0)^n,$$

gdje su koeficijenti a_n dani formulama

$$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0) \quad , pritom je f^{(0)}(z_0) := f(z_0) \qquad (1)$$

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_0} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}}\, d\xi \qquad (2)$$

pri čemu je Γ_0 pozitivno orijentirana kružnica oko z_0 radijusa manjeg od r. To je ***Taylorov red funkcije f*** *u točki z_0.*

Sada navodimo bez dokaza sljedeće rezultate. Dokaz se može naći u [1], str.125

Teorem 1.0.3. *(Princip jedinstvenosti za analitičke funkcije)*
Neka su funkcije $f, g : D \to \mathbb{C}$ analitičke funkcije, definirane na domeni $D \neq \emptyset$. Sljedeće tvrdnje su ekvivalentne:

(a) $f = g$

(b) Skup

$$\{z \in D;\ f(z) = g(z)\}$$

ima gomilište u D

(c) Postoji točka $z_0 \in D$ takva da je $f^{(n)}(z_0) = g^{(n)}(z_0),\ \forall\, n \in \mathbb{N}_0$.

Dokaz sljedećeg teorema se može naći u [2], str.60

Teorem 1.0.4. *(Liouvilleov teorem)*
Ako je funkcija f analitička na cijeloj kompleksnoj ravnini $\mathbb{C}$, i ako je ograničena, onda je f konstantna funkcija.

Taylorov razvoj koristimo za funkcije koje su analitičke na nekom krugu oko točke z_0. Međutim, ako je funkcija u točki z_0 'loša', ali je u ostalim točkama analitička, koristimo redove u kojima se osim pozitivnih potencija pojavljuju i negativne.
Za točku $z_0 \in \mathbb{C}$, te pozitivne brojeve $0 < r < R$, označavati ćemo sa $V := (z_0; r, R)$ kružni vijenac, tj. skup $\{z \in \mathbb{C} : r < |z - z_0| < R\}$.

Teorem 1.0.5. *(Laurentov teorem)*
Neka je funkcija f analitička na kružnom vijencu $V := (z_0; r, R)$ oko točke z_0. Tada za svaki $z \in V$ vrijedi

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, (z - z_0)^n$$

gdje su koeficijenti a_n dani formulom

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_0} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}}\, d\xi$$

pri čemu je Γ_0 pozitivno orijentirana kružnica oko z_0 proizvoljnog radijusa ρ, $r < \rho < R$. To je ***Laurentov red*** *funkcije f oko točke z_0.*

Dokaz prethodnog teorema se može naći u [2],str.62

Napomena 1.0.6. *Laurentov teorem vrijedi i u slučaju kada se umjesto kružnog vijenca $V(z_0; r, R)$ radi o probušenom krugu $K^*(z_0, R) := K(z_0, R)\backslash\{z_0\}$, na koji možemo gledati i kao na degenerirani vijenac s $r = 0$. Najčešće ćemo Laurentov red i promatrati upravo na nekom $K^*(z_0, R)$. Odsada ćemo, za točku $z_0 \in \mathbb{C}$ i realne brojeve $0 \leq r < R$, vijencem $V := V(z_0; r, R)$ zvati otvoren skup, koji je u slučaju $r > 0$ pravi vijenac, a za $r = 0$ je to, zapravo, probušen krug $K^*(z_0, R)$.*

Laurentovi redovi nam omogućuju proučavanje funkcija i u okolini točaka u kojima nisu analitičke, tj.u okolini singulariteta. Kažemo da je točka z_0 **singularitet**, ako u toj točki funkcija f nije definirana. Singulariteta ima različitih i vrlo neugodnih. Mi ćemo promatrati samo tzv. izolirane singularitete.

Definicija 1.0.7. *Za točku z_0 kažemo da je **izolirani singularitet** funkcije f, ako je f analitička na nekom probušenom krugu $K^*(z_0, R)$ oko točke z_0.*

Pokazati ćemo da postoje tri vrste izoliranih singulariteta, to su uklonjivi singulariteti, polovi i bitni singulariteti.

Definicija 1.0.8. *Za izoliran singularitet z_0 funkcije f kažemo da je **uklonjiv**, ako u točki z_0 možemo funkciju f predefinirati ili dodefinirati tako da postane analitička na nekom (pravom, neprobušenom) krugu $K(z_0, R)$ oko točke z_0. Drugim riječima, singularitet je uklonjiv ako ga možemo ukloniti.*

Sljedeći teorem nam daje nekoliko karakterizacija uklonjivih singulariteta. Dokaz se može naći u [2], str.71

Teorem 1.0.9. *(Karakterizacija uklonjivih singulariteta)*
Neka je funkcija f analitička na probušenom krugu $K^*(z_0, R)$. Sljedeće su tvrdnje ekvivalentne:

(i) z_0 *je uklonjiv singularitet funkcije* f.

(ii) *Postoji limes* $\lim_{z\to z_0} f(z) \in \mathbb{C}$.

(iii) *f je omeđena na nekoj okolini točke* z_0 .

(iv) $\lim_{z\to z_0}(z - z_0)f(z) = 0$

(v) *U Laurentovom razvoju funkcije f oko točke z_0 nema negativnih potencija, tj. svi koeficijenti uz negativne potencije jednaki su nuli.*

Drugi tip izoliranih singulariteta su polovi.

Definicija 1.0.10. *Za izoliran singularitet z_0 funkcije f kažemo da je* ***pol*** *, ako u Laurentovom razvoju funkcije f oko točke z_0 ima konačno mnogo (ali barem jedan) članova s negativnim potencijama, tj. s potencijama od $\frac{1}{z-z_0}$.* ***Red pola*** *je red najveće potencije od $\frac{1}{z-z_0}$ koja se u Laurentovom razvoju pojavljuje s koeficijentom različitim od nule.*

Teorem 1.0.11. *(Karakterizacija polova)*
Neka je funkcija f analitička na probušenom krugu $K^*(z_0, R)$. Sljedeće su tvrdnje ekvivalentne:

(i) *z_0 je pol funkcije f (reda m).*

(ii) *z_0 nije uklonjiv singularitet funkcije f, ali postoji prirodan broj k takav da je z_0 uklonjiv singularitet funkcije $z \mapsto (z - z_0)^k f(z)$. (Najmanji takav $k = m$ — red pola.)*

(iii) $\lim_{z \to z_0} |f(z)| = +\infty$.

Za dokaz prethodnog teorema, vidi [2], str.73

Treći tip izoliranih singulariteta su bitni singulariteti.

Definicija 1.0.12. *Za izoliran singularitet z_0 kažemo da je* ***bitan singularitet*** *ako u Laurentovom razvoju funkcije f oko točke z_0 ima beskonačno mnogo članova s negativnim potencijama, tj. beskonačno mnogo koeficijenata uz negativne potencije je različito od nule.*

Teorem 1.0.13. *(Casorati-Weierstrass-Sohockij)*
Neka je funkcija f analitička na probušenom krugu $K^*(z_0, R)$. Točka z_0 je bitan singularitet funkcije f ako i samo ako je za svaki $\delta > 0$, slika probušenog kruga $K^*(z_0, \delta)$ gusta na $\mathbb{C}$, tj. za svaki $w \in \mathbb{C}$ i svaki $\epsilon > 0$, postoji $z \in K^*(z_0, \delta)$, takav da je $|f(z) - w| < \epsilon$.

Za dokaz, vidi [2], str.75

Poglavlje 2

Gama funkcija

Gama funkcija se originalno definira preko nepravog integrala

$$\Gamma\,(z) := \int_0^\infty t^{\,z-1} e^{-t}\,dt$$

koji konvergira za $Re\ (z) > 0$. Zato ćemo prvo ponoviti neke stvari iz teorije nepravih integrala, a zatim ćemo gama funkciju proširiti do analitičke na skupu $\mathbb{C}\backslash\{0,-1,-2,...\}$.

2.1 Nepravi integrali

Za početak ćemo ponoviti neke stvari o nepravim integralima.

Definicija 2.1.1. *Neka je $f : [a, b >\to \mathbb{C}$, gdje je $a < b \leq \infty$ ($b = \infty$ dozvoljeno), neprekidna funkcija. Kažemo da je f* ***integrabilna*** *na $[a, b >$ ako vrijedi*

$$\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{t\to b} \int_a^t f(x)\,dx.$$

Taj limes se zove ***nepravi integral*** *od f na $[a, b >$.*
Funkcija f se naziva ***apsolutno integrabilna*** *ako je funkcija $|f|$ integrabilna.*

Apsolutna integrabilnost povlači integrabilnost. Preciznije:
Neprekidna funkcija $f : [a, b >\to \mathbb{C}$ je **apsolutno integrabilna** ako postoji konstanta $C \geq 0$ za koju vrijedi

$$\int_a^t |f(x)|\,dx \leq C, \forall t \in [a, b >$$

Definicija 2.1.2. *Neka je $-\infty < a < b \leq +\infty$, neka je $S \subseteq \mathbb{C}$ otvoren i neka je $f : [a, b> \times S \to \mathbb{C}$ takva da nepravi integral*

$$\int_a^b f(t,z)\,dt \tag{2.1}$$

postoji za svaki $z \in S$. Neka je $g : S \to \mathbb{C}$ funkcija definirana sa

$$g(z) := \int_a^b f(t,z)\,dt \tag{2.2}$$

Kažemo da nepravi integral u (2.1) ***konvergira uniformno*** *na $K \subseteq S$, ako $\forall \epsilon > 0$, $\exists B_0 \in [a, b>$ tako da za $z \in K$, $B \geq B_0$, $B < b$ slijedi*

$$\left| g(z) - \int_a^B f(t,z)\,dt \right| \leq \epsilon.$$

Kažemo da integral u (2.1) ***konvergira lokalno uniformno*** *na S, ako konvergira uniformno na svakom kompaktnom skupu $K \subseteq S$.*

Definicija 2.1.3. *Funkcija $f : I \to \mathbb{C}$ naziva se* ***lokalno integrabilna****, ako je $f\,|_{[a,b]}$ integrabilna za svaki zatvoren segment $[a, b] \subseteq I$.*

Sljedeće tvrdnje navodimo bez dokaza. Dokaz se može naći u [1], str. 94

Lema 2.1.4. *Neka je $-\infty < a < b \leq +\infty$, neka je $S \subseteq \mathbb{C}$ otvoren skup i neka je funkcija $f : [a, b> \times S \to \mathbb{C}$ takva da je $\forall z \in S$ funkcija $t \mapsto f(t,z)$ lokalno integrabilna na $[a, b>$. Ako za dani skup $K \subseteq S$ postoji nenegativna funkcija $F : [a, b> \to \mathbb{R}$ takva da je $\int_a^b F(t)\,dt < +\infty$, te $|f(t,z)| \leq F(t)$, za $t \in [a, b>$ i $z \in K$, onda integral u (2.1) konvergira uniformno na K.*

Lema 2.1.5. *(Leibnizovo pravilo)*
Neka je $-\infty < a < b \leq +\infty$, neka je $S \subseteq \mathbb{C}$ otvoren skup i neka je $\varphi : [a, b> \times S \to \mathbb{C}$ neprekidna funkcija takva da je $\forall t \in [a, b>$ funkcija $z \mapsto \varphi(t,z)$ analitička na S. Neka je funkcija $\psi : [a, b> \to \mathbb{C}$ lokalno integrabilna i $f(t,z) = \varphi(t,z)\,\psi(t)$. Pretpostavimo da nepravi integral $\int_a^b f(t,z)\,dt$ konvergira lokalno uniformno na S. Tada je funkcija $g : S \to \mathbb{C}$, definirana tim integralom, analitička na S i za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi formula

$$g^{(n)}(z) := \int_a^b \frac{\partial^n f(t,z)}{\partial z^n}\,dt$$

na S.

2.2 Gama funkcija

Promatramo funkciju

$$\Gamma\,(z) := \int_0^\infty t^{\,z-1} e^{-t}\, dt \tag{2.3}$$

pri čemu je $t^{\,z-1} = e^{(z-1)\, ln\, t}$, $z \in \mathbb{C}, t > 0$, $ln\, t \in \mathbb{R}$
Na gornjoj granici, to je nepravi integral. Također, za $z \in \mathbb{C},\ z \neq 1$ je $\lim_{t\to\, 0} e^{(z-1)\, ln\, t} = +\infty$, pa je i na donjoj granici nepravi integral.
Po definiciji je

$$\Gamma\,(z) := \lim_{\epsilon\to 0, R\to+\infty} \int_\epsilon^R t^{\,z-1} e^{-t}\, dt \tag{2.4}$$

Definicija 2.2.1. *Funkciju* Γ *definiranu sa formulom (2.3)(odnosno (2.4)), na skupu svih* $z \in \mathbb{C}$*, za koje postoji limes u (2.4), tj. za koje konvergira nepravi integral u (2.3) nazivamo* ***gama funkcija****.*

Parcijalnom integracijom pokažemo:

$$\Gamma\,(z) := \lim_{\epsilon\to 0, R\to+\infty} \int_\epsilon^R t^{\,z-1} e^{-t}\, dt = \lim_{\epsilon\to 0, R\to+\infty} \left[-t^{\,z-1} e^{-t} /_\epsilon^R + (z-1) \int_\epsilon^R e^{-t} t^{\,z-2} \right] = (z-1)\,\Gamma\,(z-1)$$

Dakle, vrijedi:

$$\Gamma\,(z+1) = z\,\Gamma\,(z) \quad za \quad Re\,(z) > 0 \tag{2.5}$$

Budući da je

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t}\, dt = 1 \qquad (*)$$

iz (*), za $n_0 \in \mathbb{N}$ slijedi

$$\Gamma\,(n+1) = n!$$

Prema tome, gama funkcija proširuje funkcije $n + 1 \mapsto n!$ sa $\mathbb{N}_0$ u $\mathbb{N}$

Propozicija 2.2.2. *Nepravi integral*

$$\Gamma\,(z) := \int_0^\infty t^{\,z-1} e^{-t}\, dt \qquad (**)$$

konvergira apsolutno za $Re\,(z) > 0$*. Formula (**) definira analitičku funkciju. Niz derivacija dan je sa:*

$$\Gamma^{\,(k)}\,(z) := \int_0^\infty t^{\,z-1} (ln\, t)^k e^{-t}\, dt\ (k \in \mathbb{N}_0)$$

Dokaz. Napišimo integral iz (**) kao zbroj integrala

$$\Gamma(z) := \int_0^1 t^{z-1} e^{-t}\, dt + \int_1^\infty t^{z-1} e^{-t}\, dt$$

pri čemu prvi integral definiramo kao $P(z)$, a drugi integral kao $Q(z)$. Dokazati ćemo da je $P(z)$ analitička funkcija na $Re\ (z)$ i da je $Q(z)$ cijela funkcija. Primijetimo da za $z = 0$ integral za funkciju P divergira, zato što $\int_0^1 e^{-t}\frac{1}{t}\, dt \geq e^{-1} \int_0^1 \frac{1}{t}\, dt = +\infty$. Dakle, integral u (2.3) ne konvergira za $z = 0$.
Dokažimo sada da je Q cijela funkcija.
Da bismo dokazali da je Q cijela funkcija, dovoljno je pokazati da funkcija $f : [1, +\infty > \times\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(t, z) = t^{z-1} e^{-t} = e^{-t+(z-1)\ ln\ t}$ zadovoljava uvjete Leme 2.1.4. za svaki kompaktan skup $K \subseteq \mathbb{C}$. Ta funkcija je očito neprekidna i za svako $t \in [1, +\infty >$ funkcija $z \mapsto f(t, z)$ je cijela. Neka je $K \subset \mathbb{C}$ kompaktan skup. Budući da je K ograničen skup, postoji $m \in \mathbb{N}$ takav da za $z \in K$ slijedi $Re\ (z) \leq m$. Definiramo funkciju $F_K : [1, +\infty > \to \mathbb{R}$ kao

$$F_K\ (t) = e^{-t} t^{m-1} \tag{2.6}$$

Vrijedi $\left|e^{-t}\ t^{z-1}\right| = e^{-t}\ t^{Re\ z-1} \leq e^{-t}\ t^{m-1} = F_K(t)$.
Nadalje, vrijedi: $\int_1^{+\infty} e^{-t} t^{m-1} dt < \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{m-1} dt = \Gamma(m) = (m-1)! < \infty$. Prema tome, funkcija $f(t, z) = t^{z-1} e^{-t}$ zadovoljava uvjete Leme 2.1.4., za svaki kompaktan skup $K \subseteq \mathbb{C}$, pa slijedi da funkcija Q konvergira lokalno uniformno na $\mathbb{C}$. Prema Lemi 2.1.5.(Leibnizovo pravilo), Q je cijela funkcija i za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$Q^{(n)}(z) = \int_1^{+\infty} \frac{\partial^n}{\partial z^n}\left[e^{-t} t^{z-1}\right] dt = \int_1^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} (ln\ t)^n dt \tag{2.7}$$

Promatramo funkciju P na desnoj poluravnini. Stavimo $x = min\{Re\ (z) : z \in K\} > 0$. Definiramo

$$F_K(t) = t^{x-1}$$

Budući da je $e^{-t} \leq 1$ i $|\ t^{z-1}| = t^{Re\ (z)-1} \leq t^{x-1}$, $\forall t \in <0, 1], z \in K$, slijedi da je $\left|e^{-t}\ t^{z-1}\right| \leq F_K(t)$. Nadalje, za $0 < \epsilon < 1$ imamo

$$\int_\epsilon^1 F_K(t)\, dt = \frac{1}{x}\, t^{\,x}\, |_\epsilon^1 = \frac{1}{x}(1 - \epsilon^{\,x})$$

a iz toga, zbog $x > 0$ slijedi

$$\int_0^1 F_K(t)\, dt = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{x}(1 - \epsilon^{\,x}) = \frac{1}{x} < +\infty$$

Sada iz Leme 2.1.4. i Leme 2.1.5. slijedi da je funkcija P analitička na desnoj poluravnini, te vrijedi

$$P^{(n)}(z) = \int_0^1 e^{-t} t^{\,z-1} (ln\ t)^n dt,\ Re\ (z) > 0 \tag{2.8}$$

Ovime je dokazana propozicija. □

Nadalje, promatrati ćemo problem proširenja gama funkcije s desne strane poluravnine do analitičke funkcije na većem području.
Neka je $S \subseteq \mathbb{C}$ područje koje sadrži desnu poluravninu i neka je $F : S \to \mathbb{C}$ analitička funkcija koja proširuje gama funkciju. Princip jedinstvenosti za analitičke funkcije kaže: $\forall z \in S$ takav da je $z + n \in S$ je

$$F(z+n) = (z+n-1)\cdots(z+1)\cdot z\,\Gamma(z)$$

Pretpostavimo $-k \in S$ za neki $k = 0, 1, 2, ...$ i stavimo u gornju formulu $z = -k$ i $n = k + 1$, pa dobivamo

$$F(1) = 0 \cdot (-1)\cdots(-k)F(-k) = 0$$

što je kontradikcija. Prema tome, područje S sigurno ne sadrži točke $0, -1, -2, ...$
Dokazati ćemo da se gama funkcija može proširiti do analitičke funkcije na $D = \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, ...\} = \mathbb{C} \setminus \{m \in \mathbb{Z}, m \leq 0\}$.

Za funkciju Q, dokazali smo da je cijela. Dovoljno je promatrati proširenje za funkciju P. Ako je $Re\ (z) > 0$, iz definicije slijedi

$$P(z) = \int_0^1 e^{-t} t^{\,z-1}\,dt = \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{t^k}{k!}\right) t^{\,z-1}\,dt = \int_0^1 t^{\,z-1}\,dt + \int_0^1 \left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\,t^{\,z+k-1}\right) dt$$

Vrijedi:

$$\int_0^1 t^{\,z-1}\,dt = \frac{1}{z}\quad ;\quad \int_0^1 t^{\,z+k-1}\,dt = \frac{1}{z+k}$$

Prema tome, slijedi

$$P(z) = \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\frac{1}{z+k} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\frac{1}{z+k}$$

Lema 2.2.3.

$$R(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\frac{1}{z+k}$$

je analitička funkcija na $\mathbb{C}\backslash\{0,-1,-2,...\}$*, te vrijedi*

$$Res\ (R,-k)=\frac{(-1)^k}{k!}$$

Dokaz. Dokažimo samo drugi dio. Neka je

$$R(z)=\frac{(-1)^k}{k!}\frac{1}{z+k}+R_k(z),$$

pri čemu je

$$R_k(z)=\sum_{k=0,k\neq n}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\frac{1}{z+k}$$

Prema gore pokazanom, slijedi da je $R_k(z)$ analitička na okolini od $U(-k,1)$ točke $-k$. Prema tome, glavni dio Laurentovog reda funkcije R oko točke $-k$ jednak je $\frac{(-1)^k}{k!}\frac{1}{z+k}$ □

Propozicija 2.2.4. *Funkcija* $\Gamma(z)$ *zadana sa*

$$\Gamma\ (z)=\int_1^{\infty}t^{\,z-1}e^{-t}\,dt+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\frac{1}{z+k} \tag{2.9}$$

analitička je na području $D=\mathbb{C}\backslash S$*, pri čemu je skup* $S:=\{0,-1,-2,-3,...\}$*, i* $\forall z\in\mathbb{C}\backslash S$ *funkcija* Γ *zadovoljava jednadžbu*

$$\Gamma\ (z+1)=z\,\Gamma(z) \tag{2.10}$$

Funkcija Γ *ima polove prvog reda u točkama skupa* S *i u tim polovima su joj reziduumi dani sa*

$$Res\ (\ \Gamma;-n)=\frac{(-1)^n}{n!}\qquad n=0,1,2,... \tag{2.11}$$

Zbog

$$|\ \Gamma\ (z)\ |\leq\Gamma\ (x)\qquad(x=Re\ (z))$$

funkcija Γ je ograničena u svakoj zatvorenoj pruzi oblika $0<a\leq x\leq b$. Iz toga slijedi karakterizacija gama funkcije.

Propozicija 2.2.5. *(Karakterizacija gama funkcije, H.Wielandt)*
Neka je skup $D\subset\mathbb{C}$ *domena koja sadrži vertikalnu prugu* $V\subset\mathbb{C}$*,* $V:=\{\,z=x+iy;\ x,y\in\mathbb{R},1\leq x<2\}$*. Neka je* $f:D\to\mathbb{C}$ *analitička funkcija sa sljedećim svojstvima:*

(1) f je ograničena u ovoj vertikalnoj pruzi

(2) f zadovoljava sljedeću jednadžbu:

$$f(z+1) = z\,f(z), \ \textit{za}\ z\,, z+1 \in\ D.$$

Tada vrijedi

$$f(z) = f(1)\,\Gamma(z), \ \textit{za}\ z \in\ D$$

Dokaz. Koristeći funkcionalnu jednadžbu (2.5), želimo proširiti funkciju f do analitičke funkcije na $\mathbb{C}\backslash S$, koju ćemo također označiti sa f. Proširenje funkcije f zadovoljava jednadžbu

$$f(z+1) = z\,f(z), \quad za\ \ z \in \mathbb{C}\backslash S \tag{2.12}$$

Zbog ograničenosti, funkcija f, u točkama skupa $S = \{0, -1, -2, ...\}$, ima polove prvog reda ili uklonjive singularitete, te vrijedi:

$$Res\ (\ \Gamma; -n) = \frac{(-1)^n}{n!} f(1) \tag{2.13}$$

Funkcija h, definirana kao $h(z) := f(z) - f(1)\,\Gamma\,(z)$ također ima uklonjive singularitete u S, pa je ta funkcija cijela funkcija. Želimo pokazati da je funkcija h jednaka nuli.
Funkcija h je ograničena na vertikalnoj pruzi V. Mi tu prugu možemo proširiti, pomoću funkcionalne jednadžbe (2.5), prema lijevo i dokazati ograničenost funkcije f na prugama oblika

$$a \leq x \leq b < 2, \tag{2.14}$$

uz uvjet da je $|\,\mathrm{Im}(z)| \geq 1$. Ali skup $|\,\mathrm{Im}(z)| \leq 1$, za $a \leq Re\ (z) \leq b$ je kompaktan, pa ne možemo iskoristiti Liouvilleov teorem. Da bismo iskoristili Liouvilleov teorem, koristiti ćemo sljedeći trik. Iz jednadžbi $h(z+1) = z\,h(z)$ i $h(z) := f(z) - f(1)\,\Gamma\,(z)$, konstruiramo funkciju $H : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, kao

$$H(z) := h(z)\,h(1-z) \tag{2.15}$$

Za nju nam slijedi relacija

$$H(z+1) = \ -H(z).$$

Budući da je funkcija H omeđena na skupu $\{z \in \mathbb{C} : 0 \leq Re\ (z) < \ 1\}$, a ta pruga je invarijantna za $z \mapsto 1 - z$, slijedi da je funkcija H omeđena na $\mathbb{C}$. Sada možemo primijeniti Liouvilleov teorem, po kojemu slijedi da je funkcija $H(z)$ konstanta.
Zbog $h(1) = 0$, slijedi da je ta konstanta jednaka 0. Dakle, $h = 0$, što smo i željeli pokazati. □

2.3 Teorija beskonačnih produkata

Želimo dokazati produktnu formulu za gama funkciju. Mi ćemo reducirati proučavanje beskonačnih produkata na beskonačne sume. U principu, želimo definirati

$$\prod_{n=1}^{\infty} b_n := exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} log\ b_n\right)$$

Prvo pretpostavljamo da niz b_n konvergira prema 1 (kao što niz sumanada konvergentnog reda konvergira u 0). Tada pišemo

$$b_n = 1 + a_n,$$

pri čemu je (a_n) niz koji konvergira u nulu. Tada postoji prirodan broj N takav da je $|a_n| < 1$, za $n > N$.
Sada definiramo:

$$\prod_{n=1}^{\infty} b_n := \prod_{n=1}^{N} b_n\ exp\left(\sum_{n=N+1}^{\infty} ln\ (1 + a_n)\right)$$

pri čemu je ln kompleksni logaritam, koji je na domeni $(|\ z| < 1)$ dan redom

$$ln\ (1 + z) = -\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\ \frac{z^n}{n}$$

Definicija 2.3.1. *Kažemo da je beskonačan produkt* ***(apsolutno) konvergentan****, ako je pripadni red apsolutno konvergentan.*

Za dovoljno male vrijednosti od $|z|$, npr. $|z| \leq \frac{1}{2}$, vrijedi dvostruka nejednakost:

$$\frac{1}{2}|z| \leq |\ ln(1 + z)\ | \leq 2|z|$$

Apsolutna konvergencija reda logaritma je, dakle, ekvivalentna konvergenciji reda $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$. Obratno, ovaj uvjet povlači da niz (b_n) konvergira prema 1.

Koristeći definiciju i prethodne argumente može se pokazati da su sljedeće tvrdnje ekvivalentne:

(1) $\prod_{n=1}^{\infty}(1 + |a_n|)$ konvergira;

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergira;

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} |ln(1 + a_n)|$ konvergira;

Zbog toga ćemo reći da beskonačan produkt $(1+a_1)(1+a_2)(1+a_3)...$ **konvergira apsolutno**, ako konvergira red $|a_1| + |a_2| + |a_3| + ...$

Iz gornje diskusije slijedi sljedeća tvrdnja, koju navodimo bez dokaza.

Lema 2.3.2. *Ako je red $a_1 + a_2 + a_3 + ...$ apsolutno konvergentan, onda postoji prirodan broj N takav da $|a_\upsilon| < 1$ za $\upsilon > N$ i vrijedi:*

(a) $\sum_{n=N+1}^{\infty} ln\ (1 + a_n)$ *apsolutno konvergira*

(b) $\lim_{n\to\infty} \prod_{\upsilon=1}^{n}(1 + a_\upsilon) = (1 + a_1)...(1 + a_N)\ exp\ \left(\sum_{n=N+1}^{\infty} ln\ (1 + a_n)\right)$

Napomena 2.3.3. *Limes u (b) ne ovisi o odabranom N. Zovemo ga **vrijednost** beskonačnog produkta i označavamo sa* $\prod_{n=1}^{\infty}(1 + a_n)$

Iz (b) dijela također zaključujemo:

Napomena 2.3.4. *Vrijednost apsolutno konvergentnog (beskonačnog) produkta* $(1+a_1)(1+a_2)(1+a_3)...$ *nije jednaka nuli akko su faktori* $(1 + a_n)$ *različiti od nule.*

Definicija 2.3.5. *Za red funkcija $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$, $f_n : \Omega \to \mathbb{C}$, kažemo da je **normalno konvergentan** na Ω, ako za svaku točku $z \in \Omega$ postoji okolina U i niz $(M_n)_n \geq 0$ nenegativnih realnih brojeva tako da vrijedi:*

(a) $|f_n(z)| \leq M_n$ *za sve $z \in U$ i sve $n \in \mathbb{N}$*

(b) red $\sum_{n=0}^{+\infty} M_n$ *konvergira*

(Niz M_n ovisi o okolini U točke $z \in \mathbb{C}$)

Napomena 2.3.6. *Neka je*

$$f_1 + f_2 + f_3 + ...$$

normalno konvergentan red analitičkih funkcija definiranih na otvorenom skupu $D \subseteq \mathbb{C}$. Tada beskonačan produkt

$$(1 + f_1)(1 + f_2)(1 + f_3)\ ...$$

definira analitičku funkciju $F : D \to \mathbb{C}$.

Korolar 2.3.7. *Neka je*

$$f_1 + f_2 + f_3 + ...$$

normalno konvergentan red analitičkih funkcija definiranih na otvorenom skupu $D \subseteq \mathbb{C}$ *i neka je* $F(z) = \prod_{n=1}^{\infty}(1 + f_n(z))$*. Tada je logaritamska derivacija dana sa*

$$\frac{F'(z)}{F(z)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n'(z)}{1 + f_n(z)}$$

pri čemu ovaj red konvergira lokalno uniformno.

Dokaz. Neka je

$$F(z) = \prod_{n=1}^{\infty}(1 + f_n(z)) = (1 + f_1(z)) \cdots (1 + f_n(z)) \quad F_n(z),$$

pri čemu je

$$F_n(z) = \prod_{k=n+1}^{\infty}(1 + f_k(z)), \quad z \in D.$$

Neka je K proizvoljan kompaktan skup, $K \subseteq D$. Koristeći logaritamsku derivaciju, dobivamo:

$$\frac{F'(z)}{F(z)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{f_k'(z)}{1 + f_k(z)} + \frac{F_n'(z)}{F_n(z)}, \quad z \in K$$

Budući da $P_m(z) = (1 + f_{n+1}(z)) \cdots (1 + f_m(z))$ konvergira uniformno na K prema $F_n(z)$, kada $m \to \infty$, slijedi po Weierstrassovom teoremu, da i $P_m'(z)$ konvergira na K, prema $F_n'(z)$. Tada

$$\frac{F_n'(z)}{F_n(z)} = \lim_{m\to\infty} \frac{P_m'(z)}{P_m(z)} = \lim_{m\to\infty} \sum_{k=n+1}^{m} \frac{f_k'(z)}{1 + f_k(z)} = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{f_k'(z)}{1 + f_k(z)}$$

konvergira uniformno na K. Slijedi da

$$\frac{F'(z)}{F(z)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n'(z)}{1 + f_n(z)}$$

konvergira lokalno uniformno na K. Ostaje nam pokazati apsolutnu i lokalno uniformnu konvergenciju gornjeg reda na D. Neka je K zatvoreni krug sadržan u D. Tada postoji $n_0 \geq 1$ takav da $|f_n(z)| \leq \frac{1}{2}$ na K, $\forall n \geq n_0$. Obrnuto, $|1 + f_n(z)| \geq \frac{1}{2}$ na K, $\forall n \geq n_0$. Budući da je $f \neq 0$ na K, slijedi da je $1 + f_n(z) \neq 0$ za $1 \leq n \leq n_0$, pa postoji $\alpha > 0$ takva da je

$|1 + f_n(z)| \geq \alpha$ na K za $1 \leq n \leq n_0$.
Neka je $M^{-1} = \min\{\frac{1}{2}, \alpha\}$, tada je

$$|1 + f_n(z)| \geq \frac{1}{M} \quad z \in K, \quad n \geq 1,$$

pa slijedi da je

$$\left|\frac{f_n'(z)}{1 + f_n(z)}\right| \leq M \cdot |f_n'(z)|, \quad z \in K, \quad n \geq 1.$$

Treba još pokazati da ako $\sum |f_n'(z)|$ konvergira uniformno na K, onda $\sum \frac{f_n'(z)}{1+f_n(z)}$ konvergira apsolutno i lokalno uniformno na K. Koristeći Cauchyevu integralnu formulu (vidi [2], str.28), imamo:

$$f_n'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi - z_0| = r} \frac{f_n(\xi)}{(\xi - z)^2}\, d\xi, \qquad |z - z_0| \leq \frac{r}{2}, \quad n \geq 1$$

Slijedi

$$\sum_{k=n}^{n+p} |f_k'(z)| \;\leq \frac{1}{2\pi} \int_{|\xi - z_0| = r} \frac{1}{|\xi - z|^2} \sum_{k=n}^{n+p} |f_k(\xi)|\, d\xi \;\leq \frac{4}{r} \max_{|\xi - z_0| = r} \left(\sum_{k=n}^{n+p} |f_k(\xi)| \right), \qquad |z - z_0| \leq \frac{r}{2}, \;\; p \geq 1$$

Tvrdnja sad slijedi iz Cauchyjevog kriterija. Krajnji rezultat slijedi iz kompaktnosti skupa.
□

Definicija 2.3.8. *Za beskonačan produkt* $(1 + f_1)(1 + f_2)(1 + f_3)\ldots$ *kažemo da je* ***normalno konvergentan*** *ako i samo ako pripadni red* $f_1 + f_2 + f_3 + \ldots$ *normalno konvergira.*

Vraćamo se na gama funkciju. Funkcija $\frac{1}{\Gamma}$ ima nultočke u

$$z = 0, -1, -2, -3, \ldots$$

što nas može navesti da je to slično beskonačnom produktu

$$(1 + \frac{z}{1})(1 + \frac{z}{2})(1 + \frac{z}{3})\ldots$$

ali on ne konvergira apsolutno. Imamo sljedeći rezultat:

Lema 2.3.9. *Red* $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{\frac{-z}{n}} - 1\right]$ *normalno konvergira na cijelom* $\mathbb{C}$.

Dokaz. Koristeći Taylorov razvoj, imamo

$$(1 + w)\, e^{-w} - 1 = -\frac{w^2}{2} + \textit{članovi višeg reda}$$

stoga za svaki kompaktan skup $K \subset \mathbb{C}$ postoji konstanta C takva da vrijedi

$$|\,(1+w)\,e^{-w}-1| \leq Cw^2 \quad \forall w \in K$$

Tada je red $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{\frac{-z}{n}}-1\right]$, do na konstantu, ograničen sa

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

. □

Sljedeći korolar je posljedica upravo dokazane leme, jer se beskonačan produkt može svesti na beskonačnu sumu.

Korolar 2.3.10. *Beskonačan produkt* $H(z) := \prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{\frac{-z}{n}}$ *definira cijelu funkciju* H *uz uvjet:*

$$H(z)=0 \Leftrightarrow -z \in \mathbb{N}$$

Lema 2.3.11. *Neka je*

$$G_n(z) = ze^{-z\ ln\ n}\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{z}{k}\right).$$

Tada je

$$\lim_{n\to\infty} G_n(z) = ze^{\gamma z}H(z),$$

pri čemu je $\gamma := \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}-\ln n\right) \approx 0.577215664...$ ***Euler-Mascheroni konstanta***

Korolar 2.3.12. *Funkcija* $G(z) = \lim_{n\to\infty} G_n(z)$ *je analitička na cijelom* $\mathbb{C}$ *i ima polove prvog reda na skupu* $S = \{0,-1,-2,...\}$.

Dokaz. Koristeći definiciju Euler-Mascheroni konstante, te Korolar 2.3.10. i Lemu 2.3.11., dobivamo:

$$G(z) = \lim_{n\to\infty} G_n(z) = ze^{\gamma z}H(z) = ze^{z\left(1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}-\ln n\right)}H(z) = ze^{z\left(1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}-\ln n\right)}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{\frac{-z}{n}}$$

□

Propozicija 2.3.13. *(Gauss)*
Za svaki $z \in \mathbb{C}$ *vrijedi*

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = G(z) = \lim_{n\to\infty}\frac{n^{-z}}{n!}\,z\,(z+1)\cdots(z+n) \tag{2.16}$$

Dokaz. Provjeravamo karakteristična svojstva gama funkcije iz Propozicije 2.2.5. za funkciju $1/G$. Uočimo da je $1/G$ analitička funkcija na domeni koja sadrži vertikalnu prugu $1 \leq x < 2$, $x := Re\,(z)$.

(1) Zbog
$$|n^{-z}| = n^x$$
i
$$|z + k| \geq x + k,$$
vrijedi da je $1/G(z)$ ograničena na toj vertikalnoj pruzi.

(2) Jednostavnim računom dobivamo:
$$z\, G_n(z+1) = \frac{z+n+1}{n} G_n(z)$$
iz čega slijedi da $1/G$ zadovoljava funkcionalnu jednadžbu.

(3) Vrijedi:
$$G_n(1) = 1 + \frac{1}{n}, \quad za\ \ svaki\ \ n$$

□

Korolar 2.3.14. *Funkcija definirana formulom (2.16) nema nultočaka.*

Kao što smo već pokazali u dokazu Propozicije 2.2.5.(karakterizacija gama funkcije), za funkciju h, korisno je povezati sa Γ funkciju
$$f(z) := \Gamma(z)\,\Gamma(1-z).$$
Znamo da je funkcija f periodična do na predznak
$$f(z+1) = -f(z),$$
i to sa periodom 2. Ona ima polove prvog reda u cijelim brojevima, a odgovarajući rezidumi su joj dani sa:
$$Res(f; -n) = \lim_{z \to -n} (z+n)\,\Gamma(z)\,\Gamma(1-z) = (-1)^n$$
Analogni rezultati vrijede i za funkciju
$$\frac{\pi}{\sin \pi z}, tj.$$
$$Res(\frac{\pi}{\sin \pi z}; -n) = (-1)^n$$

Propozicija 2.3.15. *(Euler)*
Za svaki $z \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{Z}$ vrijedi

$$\Gamma(z)\,\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z} \tag{2.17}$$

Formula (2.17) naziva se **produktna formula**

Dokaz. Funkcija

$$h(z) := \Gamma(z)\,\Gamma(1-z) - \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$$

je ograničena na skupu $0 \leq x \leq 1, |y| \geq 1$ i u točkama $z = n$, za $n \in \mathbb{Z}$ ima uklonjive singularitete. Dakle, h je cijela funkcija. Budući da je pravokutnik

$$0 \leq x \leq 1, \ |y| \leq 1$$

kompaktan, slijedi da je h ograničena na pruzi $0 \leq x \leq 1$. S obzirom da je h periodična do na predznak, slijedi da je h ograničena na cijelom $\mathbb{C}$. Sada, po Liouvilleovom teoremu slijedi da je h konstanta, a zbog uvjeta:

$$h(z) = -h(-z),$$

konstanta mora biti nula. □

Korolar 2.3.16. *Budući da je* $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$, *općenito vrijedi*

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \prod_{k=0}^{n-1} \left(k + \frac{1}{2}\right), \quad n \in \mathbb{N}_0$$

Dokaz. Dokaz slijedi iz $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ i rekurzije $\Gamma(z+1) = z\,\Gamma(z)$ pomoću matematičke indukcije.

□

Korolar 2.3.17. *Vrijedi:*

$$\frac{\sin \pi z}{\pi} = z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right) \tag{2.18}$$

(apsolutno konvergentan produkt)

Dokaz. Po jednadžbi (2.5) vrijedi $\Gamma\,(1-z) = -z\,\Gamma\,(-z)$. Sada primjenom Gaussa na funkciju $\frac{1}{\Gamma\,(z)\,\Gamma\,(1-z)}$, dobivamo:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\Gamma\,(z)\,\Gamma\,(1-z)} &= \frac{-1}{z}\left(\lim_{n\to\infty}\frac{n^{-z}}{n!}\,z\,(z+1)\cdots(z+n)\right)\left(\lim_{n\to\infty}\frac{n^{z}}{n!}\,(-z)\,(1-z)\cdots(n-z)\right)\\
&= z\lim_{n\to\infty}\frac{(1-z^2)\cdots(n^2-z^2)}{1^2\cdots n^2}\\
&= z\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right)
\end{aligned}$$

□

U nastavku navodimo dekompoziciju kotangensa.

$$\mathrm{ctg}\;\pi z := \frac{\cos\pi z}{\sin\pi z},\quad z\in\mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}$$

Iz produktnog proširenja za sinus, možemo dokazati dekompoziciju kotangensa na drugačiji način, uz upotrebu

$$\frac{\sin' z}{sin\ z} = \mathrm{ctg}\,z.$$

Propozicija 2.3.18. *Za svaki $z\in\mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}$ vrijedi*

$$(*)\qquad \pi\ \mathrm{ctg}\,\pi z = \frac{1}{z}+\sum_{n\in\mathbb{Z},n\neq 0}\left[\frac{1}{z-n}+\frac{1}{n}\right] = \left(\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{z-n}+\frac{1}{z+n}\right\} = \frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2z}{z^2-n^2}\right)$$

Redovi u gornjoj formuli konvergiraju apsolutno, čak i normalno.

Prisjetimo se prvo definicije **dvostranog reda**

$$\sum_{n\neq 0} a_n := \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}$$

pri čemu je

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} = \sum_{n=-1}^{-\infty} a_n := \lim_{n\to\infty}\sum_{k=-1}^{-n} a_n$$

Dokaz. Apsolutna konvergencija slijedi iz

$$\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n} = \frac{z}{(z-n)n}$$

i iz konvergencije reda $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\cdots+\ldots$. Inače, apsolutna konvergencija reda $\sum_{n\neq 0} a_n, n \in \mathbb{Z}$ slijedi iz realne analize iz

$$\sum_{n\neq 0} a_n := \lim_{N\to\infty} \sum_{n\in S_N} a_n,$$

pri čemu je $S_1, S_2, ...$ rastući niz skupova, $S_1 \subset S_2 \subset ...$ i $\mathbb{Z}\backslash\{0\} = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup ...$ Da bi dokazali dekompoziciju, za fiksan $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}$ definiramo funkciju

$$f(w) = \frac{z}{w(z-w)} \pi \operatorname{ctg} \pi w.$$

Singulariteti funkcije f su $w = z$ i $w = n, n \in \mathbb{Z}$. Svi singulariteti su polovi prvog reda, osim pola $w = 0$, koji je drugog reda. Reziduumi su dani sa

$$-\pi \operatorname{ctg} \pi z \quad i \quad \frac{z}{n(z-n)}, za \;\; n \neq 0, te \;\; za \;\; n = 0 \;\; je \;\; \frac{1}{z}$$

Svi ti reziduumi su sumandi u dekompoziciji na parcijalne razlomke (*). Sada integriramo funkciju f po rubu kvadrata Q_N, čiji su vrhovi dani sa $(\pm 1 \pm i)(N + \frac{1}{2})$. Njegovi bridovi su paralelni sa osima, a duljina im je $2N + 1$, $N \in \mathbb{N}$. oviše, pretpostavljamo $N > |z|$. Dok integriramo, nema singulariteta od f. Dobivamo:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial Q_N} f(\xi) d\xi = -\pi \operatorname{ctg} \pi z + \frac{1}{z} + \sum_{0<|n|\leq N} \frac{z}{n(z-n)}$$

Ostaje nam pokazati da integral sa lijeve strane jednakosti konvergira u nulu kada $N \to \infty$. Za to je dovoljno pokazati da je $\pi \operatorname{ctg} \pi w$ ograničen na ∂Q_N, zbog procjene

$$\left| \int_{\partial Q_N} f(\xi) d\xi \right| \leq const \cdot 4(2N+1) \frac{|z|}{(N+\frac{1}{2})(N+\frac{1}{2}-|z|)}$$

Na prostoru $|y| \geq 1$, $y = \operatorname{Im} z$ imamo

$$\operatorname{ctg}(\pi z) \leq \frac{1 + exp(-2\pi\,|y|)}{1 - exp(-2\pi\,|y|)} \leq \frac{1 + exp(-2\pi)}{1 - exp(-2\pi)}$$

Nadalje, iz periodičnosti kotangensa slijedi ograničenost od

$$\pi \operatorname{ctg} \pi \left(\pm \left(N + \frac{1}{2} \right) + iy \right), za \;\; |y| \leq 1.$$

Ovime je dokaz završen. □

Poglavlje 3

Weierstrassova produktna formula

U ovom poglavlju ćemo se baviti konstrukcijom analitičke funkcije $f : D \to \mathbb{C}$ koja ima svojstva:

(a) $f(z) = 0 \Longleftrightarrow z \in S$, i

(b) $ord(f; s) = m_s$.

Pri tome je zadano područje D podskup od $\mathbb{C}$ i S je diskretan podskup skupa D. Za bilo koji $s \in S$ fiksiramo prirodan broj $m_s (\geq 1)$.

Takvu ćemo funkciju konstruirati pomoću Weierstrassovog produkta i to za slučaj $D = \mathbb{C}$.
Budući da su zatvoreni krugovi u $\mathbb{C}$ kompaktni skupovi, postoji samo konačno mnogo elemenata $s \in S$ takvih da je $|s| \leq N$. Dakle, mi te elemente možemo sortirati od najmanjeg do najvećeg, po apsolutnoj vrijednosti:

$S = \{s_1, s_2, ...\}$

$|s_1| \leq |s_2| \leq |s_3| \leq ...$

Ako je skup S konačan, tada je tražena funkcija polinom:

$$\prod_{s \in S} (z - s)^{m_s} \tag{3.1}$$

Za beskonačan skup S, gornji produkt općenito neće konvergirati. Možemo također pretpostaviti da 0 nije u S. Zahtjev $ord(f, 0) = m$ možemo zadovoljiti množenjem sa z^m.
Mi ćemo promatrati sljedeći beskonačan produkt

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{s_n}\right)^{m_n}, m_n = m_{s_n} \tag{3.2}$$

Ponekad, gornji produkt (3.2), konvergira normalno za $s_n = n^2$ i $m_n = 1$, ali to nije uvijek istina za $s_n = n$ i $m_n = 1$.

Sljedeći teorem nam govori kakvo svojstvo ima analitička funkcija na elementarnoj domeni. Prije samog iskaza teorema, navodimo definiciju elementarne domene.

Definicija 3.0.19. *Neka je $S \subseteq \mathbb{C}$ područje (otvoren i povezan skup) i neka je $f : S \to \mathbb{C}$ analitička funkcija. Skup S se zove **elementarna domena** ako f na S ima primitivnu funkciju.*

Teorem 3.0.20. *Neka je $f : S \to \mathbb{C}$ analitička funkcija na elementarnoj domeni S i neka je $f(z) \neq 0$ za svaki $z \in S$. Tada postoji analitička funkcija $h : S \to \mathbb{C}$ sa svojstvom*

$$f(z) = exp(h(z))$$

Dokaz. Neka je F primitivna funkcija od f'/f i definirajmo funkciju G, $G : S \to \mathbb{C}$ sa

$$G(z) := \frac{exp(F(z))}{f(z)}$$

Lako se vidi da vrijedi sljedeće: $G'(z) = 0$, $\forall z \in S$, iz čega slijedi da je funkcija G konstanta (jer je S područje). Tada možemo pisati

$$exp(F(z)) = k \cdot f(z) \qquad \forall z \in S, k \neq 0.$$

Zbog surjektivnosti preslikavanja funkcije $exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \backslash 0$ postoji $c \in \mathbb{C}$ takav da je

$$k = exp(c).$$

Tada funkcija

$$h(z) := F(z) - c$$

ima željeno svojstvo. □

Primjenom Weierstrassa, uvodimo nove faktore, umjesto beskonačnog produkta (3.2), promatramo sljedeći beskonačan produkt:

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{s_n}\right)^{m_n} e^{P_n(z)} \tag{3.3}$$

Pronaći ćemo polinome $P_n(z)$ za koje gornji produkt konvergira, te za svaki $z \in \mathbb{C}$ vrijedi:

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{z}{s_n}\right)^{m_n} e^{P_n(z)} = 1$$

Korolar 3.0.21. *Postoji analitička funkcija na otvorenom krugu $K(0, |s_n|)$ t.d. je*

$$\left(1 - \frac{z}{s_n}\right)^{m_n} e^{A_n(z)} = 1,$$

$\forall z \in K(0, |s_n|)$ i $A_n(0) = 0$.

Dokaz. Funkcija $f_n(z) = \frac{1}{\left(1-\frac{z}{s_n}\right)^{m_n}}$ je holomorfna na krugu $K(0, |s_n|)$ i $f(z) \neq 0$, $\forall z \in K(0, |s_n|)$, pa po Teoremu 3.0.21. postoji holomorfna funkcija $A_n : K(0, |s_n|) \to \mathbb{C}$ t.d. je $f_n(z) = exp(A_n(z))$, tj. $\left(1 - \frac{z}{s_n}\right)^{m_n} e^{A_n(z)} = 1$, $\forall z \in K(0, |s_n|)$ i $A_n(0) = 0$ □

Funkciju A_n, koja je analitička na $K(0, |s_n|)$, možemo razviti u red potencija koji uniformno konvergira na kompaktnom skupu K, $K \subset K(0, |s_n|)$. Ako skratimo taj red potencija, pri čemu ga skraćujemo do stupnja polinoma koji najviše odgovara, dobivamo polinom P_n sa svojstvom:

$$\left|1 - \left(1 - \frac{z}{s_n}\right)^{m_n} e^{P_n(z)}\right| \leq \frac{1}{n_2}, \forall z \;\; t.d. \;\; |z| \leq \frac{1}{2}|s_n|$$

Zbog konvergencije reda $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots + \ldots$ slijedi:

Propozicija 3.0.22. *Neka je zadan $R > 0$. Odaberemo $n_0 \in \mathbb{N}$ t.d. za $n \geq n_0$ $\frac{1}{2}|s_n| \geq R$. Tada je na krugu $|z| \leq R$ red*

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} \left|1 - \left(1 - \frac{z}{s_n}\right)^{m_n} e^{P_n(z)}\right|$$

normalno konvergentan.

Dokaz. Kako je $|z| \leq R \leq \frac{1}{2}|s_n|$, za $n \geq n_0$ imamo: $|1 - \left(1 - \frac{z}{s_n}\right)^{m_n} e^{P_n(z)}| \leq \frac{1}{n^2}$, pa tvrdnja slijedi iz $\sum_{n=n_0}^{+\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty$ □

Direktna posljedica gornje tvrdnje je sljedeća tvrdnja:

Propozicija 3.0.23. *Neka je zadan $R > 0$. Tada za $|z| \leq R$ red*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|1 - \left(1 - \frac{z}{s_n}\right)^{m_n} e^{P_n(z)}\right|$$

konvergira normalno.

Iz Korolara 3.0.21., te Propozicija 3.0.22. i 3.0.23. slijedi teorem:

Teorem 3.0.24. *(Weierstrassov teorem o produktima, prva varijanta)*
Neka je S diskretan podskup od $\mathbb{C}$ ($S \subset \mathbb{C}$) i neka je

$$m : S \to \mathbb{N}, s \mapsto m_s$$

Tada postoji analitička funkcija $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ sa sljedećim svojstvima:

(a) $S = N(f) := \{z \in \mathbb{C} : f(z) = 0\}$

(b) $m_s = ord(f; s), \forall s \in S$

Dakle, funkcija f ima nultočke točno u točkama $s \in S$, a za $\forall s \in S$ red nultočke je unaprijed definirana vrijednost m_s. Po konstrukciji, f ima oblik (konačnog ili beskonačnog) produkta, iz kojeg je lako iščitati nultočke funkcije f, kao i njihov red.

Zajedno sa f, bilo koja druga funkcija $F(z) := exp(h(z))f(z)$ je također rješenje iste distribucije nultočaka, pri čemu je $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ cijela funkcija.
Obratno, svako drugo rješenje F, iste distribucije nultočaka, zadovoljava da je kvocijent $g := \frac{F}{f}$ cijela funkcija bez nultočaka i Teorem 3.0.20. nam osigurava egzistenciju cijele funkcije h t.d. je $exp(h) = g = \frac{F}{f}$.

Važna posljedica Weiersstrasovog teorema o produktima je sljedeća propozicija. Prije iskaza same propozicije, navodimo definiciju meromorfne funkcije.

Definicija 3.0.25. *Za funkciju f kažemo da je* ***meromorfna*** *na otvorenom skupu $S \subset \mathbb{C}$ ako skup singulariteta nema gomilište u S, te ako su svi singulariteti ili uklonjivi ili polovi.*

Propozicija 3.0.26. *Svaka meromorfna funkcija $f : \mathbb{C} \to \overline{\mathbb{C}}$ može se prikazati kao kvocijent dvije cijele funkcije. Drugim riječima, polje $\mathcal{M}(\mathbb{C})$ svih meromorfnih funkcija na $\mathbb{C}$ je kvocijentno polje integralne domene $\mathcal{O}(\mathbb{C})$ svih cijelih funkcija.*

Dokaz. Neka je $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C}), f \equiv 0$ i neka je $S := S(f)$ skup svih polova funkcije f. Tada je diskretan podskup od $\mathbb{C}$ ($S \subset \mathbb{C}$). Definiramo $m_s := -ord(f; s)$, red pola funkcije f u svakom $s \in S$. Koristeći tako definirane m_s u distribuciji nultočaka $\{(s, m_s) : s \in S\}$, znamo da postoji cijela funkcija h t.d. je $N(h) = S$ i $ord(h; s) = m_s$.
Meromorfna funkcija $g = fh$ na $\mathbb{C}$ ima samo uklonjive singularitete, tako da je to analitička funkcija na $\mathbb{C}$. Tada imamo $f = \frac{g}{h}$, pri čemu funkcije g i h nemaju zajedničkih nultočaka. □

3.1 Primjena

Definiramo **Weierstrassove elementarne faktore** E_k kao

$$E_0 := (1-z),\ E_k(z) := (1-z)\,exp\left(z+\frac{z^2}{2}+\cdots+\frac{z^k}{k}\right), k\in\mathbb{N}$$

te **Weierstrassov beskonačan produkt** kao

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(E_{k_n}\left(\frac{z}{s_n}\right)\right)^{m_n}$$

Lema 3.1.1. *Neka su $m>0$ i $k\geq 0$ dva prirodna broja. Uz pretpostavku da je $2\,|z|\leq 1$ i $2\,m\,|z|^{k+1}\leq 1$, imamo:*

$$|\,E_k(z)^m-1\,|\leq 4\,m\,|z|^{k+1}$$

Lema 3.1.2. *Neka je $(s_n)_{n\geq 1}$ niz kompleksnih brojeva različitih od 0 takvih da je*

$$\lim_{n\to\infty}|s_n|=\infty \qquad (*).$$

Neka je $(m_n)_{n\geq 1}$ proizvoljan niz prirodnih brojeva. Tada postoji niz $(k_n)_{n\geq 1}$ nenegativnih brojeva, takav da red

$$\sum_{n=1}^{\infty}m_n\left|\frac{z}{s_n}\right|^{k_n+1} \tag{3.4}$$

konvergira za svaki $z\in\mathbb{C}$.

Dokaz. Fiksirajmo $z\in\mathbb{C}$. Zbog (*), postoji $n_0\in\mathbb{N}$ takav da za svaki $n\geq n_0$ vrijedi

$$\left|\frac{z}{s_n}\right|\leq\frac{1}{2}$$

Stoga, za $n\geq n_0$ slijedi

$$m_n\left|\frac{z}{s_n}\right|^{k_n+1}\leq m_n\left(\frac{1}{2}\right)^{n+m_n}<\left(\frac{1}{2}\right)^{n}$$

□

Sada navodimo drugu verziju Weierstrassove produktne formule:

Teorem 3.1.3. *(Weierstrassov teorem o produktima, druga varijanta)*
Neka je niz $(k_n)_{n\geq 1}$ definiran kao u Lemi 3.1.2., Weierstrassov produkt

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(E_{k_n}\left(\frac{z}{s_n}\right)\right)^{m_n} \tag{3.5}$$

konvergira normalno u $\mathbb{C}$ i definira analitičku funkciju $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ čije su nultočke upravo točke $s_1,\ s_2,\ s_3, \ldots$ a pripadni redovi nultočaka su $m_1, m_2, m_3, \ldots.$ Funkcija $f_0(z) := z^{m_0} f(z)$ ima jos jednu nultočku reda m_0.

Dokaz. Zbog konvergencije reda (3.4), za svaki $z \in \mathbb{C}$, moramo samo pokazati (normalnu) konvergenciju produkta u (3.5), tj. po ekvivalenciji (normalnu) konvergenciju sume

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(E_{k_n}\left(\frac{z}{s_n}\right)^{m_n} - 1\right) \tag{3.6}$$

Neka je $R > 0$ proizvoljan. Izaberimo dovoljno veliki N takav da za svaki $n \geq N$

$$\frac{R}{|s_n|} \leq \frac{1}{2}.$$

Elementi konvergentnog reda teže ka nuli, pa nakon povećanja N, ako je potrebno, imamo

$$2\, m_n \left(\frac{R}{|s_n|}\right)^{k_n+1} \leq 1$$

za $n \geq N$. Iz Leme 3.1.1. slijedi da za svaki $n \geq N$ i za svaki z takav da $|z| \leq R$ vrijedi

$$\left| E_{k_n}\left(\frac{z}{s_n}\right)^{m_n} - 1 \right| \leq 4\, m_n \left(\frac{|z|}{|s_n|}\right)^{k_n+1} \leq 4\, m_n \left(\frac{R}{|s_n|}\right)^{k_n+1}.$$

Normalna konvergencija sada slijedi iz Leme 3.1.2. □

Sada,pa nadalje koristimo profinjeniju verziju Weierstrassove produktne formule iz Teorema 3.1.3. Navodimo neke primjere, u kojima se konvergencija može dokazati i direktno.

1. Tražimo cijelu funkciju f, čije su nultočke ≥ 0. Budući da $\sum_{n=1}^{\infty}\left|z \cdot n^{-2}\right|$ konvergira za svaki $z \in \mathbb{C}$, možemo uzeti da je $k_n = 0, \forall n \in \mathbb{N}$. Weierstrassov teorem nam daje sljedeće rješenje:

$$f(z) := z \cdot \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z}{n^2}\right)$$

2. Tražimo cijelu funkciju f, koja ima nultočke u $\mathbb{Z}$. Zbog toga poredajmo brojeve u sljedećem poretku

$$s_0 = 0,\ s_1 = 1,\ s_2 = -1, \dots,\ s_{2n-1} = n,\ s_{2n} = -n, \dots$$

Weierstrassov teorem nam daje sljedeće rješenje:

$$f(z) := z \cdot \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{n^2}\right) e^{\frac{z}{s_n}}$$

Zbog konvergencije reda

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{z}{s_n}\right|^2 = |z|^2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|s_n|^2}$$

za svaki $z \in \mathbb{C}$, imamo:

$$\begin{aligned} f(z) &= z \lim_{N\to\infty} \prod_{n=1}^{2N} \left(1 - \frac{z}{s_n}\right) e^{z/s_n} \\ &= z \lim_{N\to\infty} \prod_{n=1}^{N} \left(\left(1 - \frac{z}{n}\right) e^{\,z/n}\right)\left(\left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{\,-z/n}\right) \\ &= z \lim_{N\to\infty} \prod_{n=1}^{N} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right) \\ &= z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right) \end{aligned}$$

Ovaj beskonačan produkt konvergira apsolutno.
Drugi način rješavanja istog problema je pomoću sin πz. Njega svodimo na beskonačan produkt pomoću dekompozicije za kotangens funkciju. Vrijedi:

$$\pi \frac{\cos \pi z}{\sin \pi z} = \pi \operatorname{ctg} \pi z = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\,z}{z^2 - n^2}$$

Nakon dijeljenja sin πz sa z i puštanja $z \to 0$, dobivamo da se ta dva rješenja razlikuju za konstantu π. Dakle, drugo rješenje nam je oblika

$$\sin \pi z = \pi z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)$$

Ovdje smo, dakle, pokazali drugi način za produktno proširenje $sin(\pi z)$.

Bibliografija

[1] E. Freitag, R. Busam: *Complex Analysis* . Springer-Verlag , (2009.)

[2] Ungar: *Kompleksna analiza* . Elektronička skripta, (2009.)

[3] S. Kurepa, H. Kraljević: *Matematička analiza 4* . Tehnička knjiga, (1986.)

[4] I. Hsiung Lin: *Classical Complex Analysis*. World Scientific, (2011.)

Sažetak

U ovome radu proučavali smo teoriju analitičkih funkcija s posebnim naglaskom na razne konstrukcije analitičkih funkcija. Važnije konstrukcije koje smo proučavali su konstrukcija gama funkcije, teorija beskonačnih produkata i Weierstrassova produktna formula.

Summary

In this work, we studied the theory of analytic functions with special emphasis on the various structures of analytical functions. More important structures that we studied are construction of the Gamma functions, the theory of infinite products and the Weierstrass product formula.

Životopis

Zovem se Ines Pozaić. Rođena sam 27. srpnja 1986. godine, u Novoj Gradišci. Pohađala sam osnovnu školu Ante Kovačić, a zatim Gimnaziju Lucijan Vranjanin u kojoj sam i maturirala 2005. godine. Iste godine upisala sam preddiplomski sveučilišni studij matematike, koji sam završila 2012. godine. Nakon toga upisala sam diplomski studij Matematičke statistike koji sam završila 2014. godine.